ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο απόδειξη σελ.186

Α2. Σχολικό βιβλίο θεωρία σελ. 142

Α3. Σχολικό βιβλίο θεωρία σελ.161

Α4.

α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$,

$g(x): [0, +\infty)$ με $g(x) = \sqrt{x}$.

Για το $D_{fog} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} \leq 1\} = \{x \geq 0 \text{ και } x \leq 1\}$

Άρα $D_{fog} = [0,1]$

$fog(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = ((\sqrt{x})^2 - 1)^2 = (x-1)^2, x \in [0,1]$

Β2.

$h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0,1]$

είναι παραγωγίσιμη στο [0.1] με $h'(x) = 2(x-1) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$

Άρα η h(x) είναι γν. φθίνουσα στο [0,1] άρα η h(x) είναι ΄1-1΄ άρα αντιστρέψιμη.

h(x)=y ⇔ $(x-1)^2$=y ⇔ |x-1|=$\sqrt{y}$ ⇔ 1-x=$\sqrt{y}$ ⇔ x=$1-\sqrt{y}$, x∈[0,1]   (1)

με 0≤1-$\sqrt{y}$≤1 ⇔ -1≤-$\sqrt{y}$≤0 ⇔1≥$\sqrt{y}$≥0 ⇔ y∈[0,1]

από (1) => $h^{-1}(y)=1-\sqrt{y}$

άρα $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, x∈[0,1]

B3.i) $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}, x \in [0,1]$

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{1-x} &, x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2} &, x=1 \end{cases}$$

Πρέπει να έχουμε φ συνεχή στο [0,1). Η φ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών στο [0,1)

$$\lim_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{1-x}}{\cancel{(1-x)}(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=\varphi(1)$ άρα η φ(x) είναι συνεχής στο 1 , άρα φ συνεχής στο [0,1].

Επίσης φ(0)=1 ≠ $\frac{1}{2}$ = φ(1).

Άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις του ΘΕΤ.

B3.ii)

$$\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$$

Για κάθε $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $\kappa(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0, $\frac{\pi}{2}$]άρα

$\eta\mu\frac{\pi}{6}\leq\eta\mu\alpha\leq\eta\mu\frac{\pi}{2}$ ⇔ $\frac{1}{2}\leq\eta\mu\alpha\leq 1$

Άρα για $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ ⇔ $\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$

Οπότε από Β3i και εφόσον ισχύει το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ *τέτοιο ώστε*

$$\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$,

$f(0) = 0$

Για $x < -1$: $f'(x) = -2$ $άρα$ $f(x) = -2x + c_1$

Για $x > -1$: $f'(x) = 3x^2 - 1$, άρα $f(x) = x^3 - x + c_2$

Οπότε $f(x) = \begin{cases} -2x + c_1 & , x < -1 \\ x^3 - x + c_2 & , x > -1 \\ c_3 & , x = -1 \end{cases}$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$

Άρα $2+c_1= 0 = c_3$

Επομένως $c_1=-2$ και $c_3=0$

Οπότε $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , x < -1 \\ x^3 - x & , x > -1 \\ 0 & , x = -1 \end{cases}$ ή $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , \quad x \leq -1 \\ x^3 - x & , \quad x > -1 \end{cases}$,

Γ2. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ διέρχεται από το Κ(0,-2) άρα

$$-2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(0 - x_0) \Leftrightarrow$$

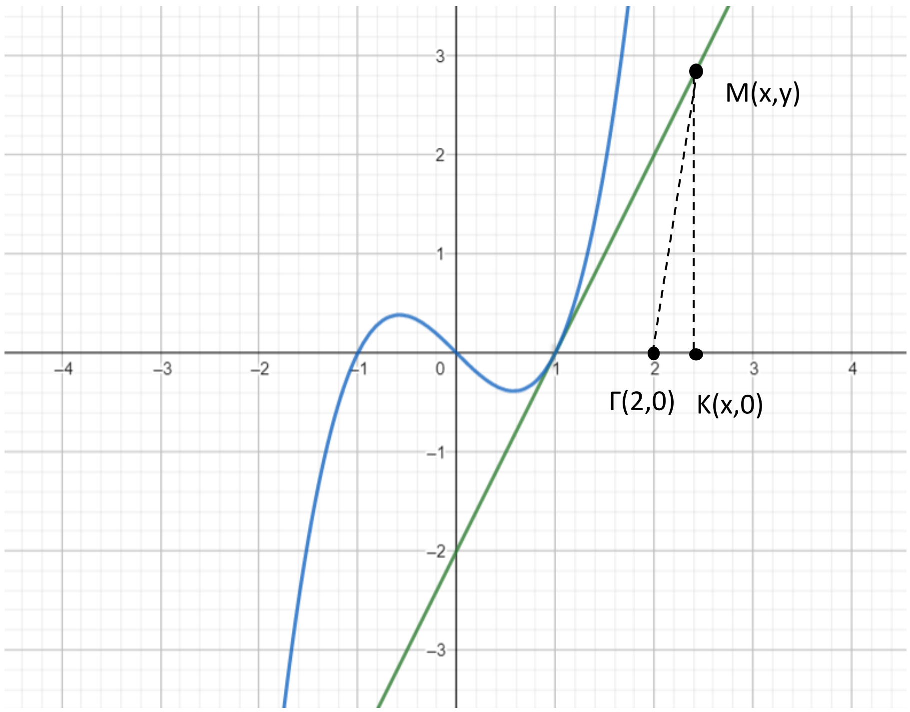
$$-2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow$$

$$2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Οπότε το σημείο επαφής είναι το Α(1,f(1)) δηλαδή Α(1,0) και η εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - 0 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Γ3.



y=2x-2 , x>2 άρα y>2

$$E = \frac{1}{2}(ΓK)(MK) = \frac{1}{2}(x-2)(2x-2) = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$$

$E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$

$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t) \ για\ t = t_o$

Είναι $x(t_o) = 3, x'(t_o) = 2\ οπότε$

$$E'(t_o) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \frac{τ.μ.}{sec}.$$

Γ4.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right)=1$$

Διότι:

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$

  Θέτουμε f(x)=y, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

  $$\lim_{y\to+\infty}\frac{\eta\mu y}{y}=0$$

  $$\left|\frac{\eta\mu y}{y}\right|\leq\frac{1}{|y|}\Leftrightarrow\frac{-1}{|y|}\leq\frac{\eta\mu y}{y}\leq\frac{1}{|y|}$$

  $$\lim_{y\longrightarrow+\infty}\left(-\frac{1}{|y|}\right)=\lim_{y\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{|y|}\right)=0$$

  Από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{y\to+\infty}\frac{\eta\mu y}{y}=0$

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}$

  Θέτω -x=y άρα $y\to+\infty$

  $$\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{1+y^3}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3-y}{1+y^3}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^3}{y^3}=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x) = x - \ln(3x)\,, x > 0$$

i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{3x} \cdot 3 = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

	0		1		+∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x - \ln(3x)) = +\infty$
- $f(1) = 1 - ln3 < 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(lne^x - \ln(3x)) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{3x}\right)$

Θέτουμε $\frac{e^x}{3x} = y$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{e^x}{3x}\right) \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{e^x}{3}\right) = +\infty$, οπότε έχουμε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to +\infty} y = +\infty$

Οπότε $A_1 = f\big((0,1]\big) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [\,1 - ln3, +\infty)$, $εφόσον\ f\ φθίνουσα$

$A_2 = f([1,+\infty)) = [f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = [1 - ln3\,, +\infty)$, εφόσον f αύξουσα

Επειδή $0 \in A_1$ $η\ εξίσωση\ f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_1 \in (0,1)$

τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ και αφού f είναι 1-1 θα είναι και μοναδική.

Επειδή $0 \in A_2$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in (1, +\infty)$

τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$ και αφού f είναι $1 - 1$ θα είναι μοναδική,

τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες $x_1 < 1 < x_2$.

ii) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x > 0$$

Άρα f κυρτή $(0, +\infty)$

Δ2. Ε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από C_f και x'x , οπότε

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$$

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

$$x < x_1 < 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_1) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$x_1 < x < 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_1) \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$1 < x < x_2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_2) \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$x_2 < x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

x		x_1		x_2	
f(x)	+	0	-	0	+

Οπότε είναι $E = -\int_{x_1}^{x_2}(\chi - \ln(3x))dx = -\int_{x_1}^{x_2} x dx + \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x)\, dx =$

$-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x} \ln(3x)\, dx = -\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right) + [xln3x]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x} dx =$

$$-\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right) + (x_2 ln3x_2 - x_1 ln3x_1) - (x_2 - x_1)$$

Όμως
$$\left(\begin{array}{c} x_1 - \ln 3x_1 = 0 \Leftrightarrow ln3x_1 = x_1 \\ \chi_2 - \ln 3x_2 = 0 \Leftrightarrow ln3x_2 = x_2 \end{array}\right)$$

$$= -\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right) + (x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1)$$

$$= -\frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)}{2}$$

$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(-x_2-x_1+2x_2+2x_1-2)=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2\,)$

Δ3.

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2\,)\ \mu\varepsilon\ x_1<1<x_2$$

$$\mathrm{E}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)>0 \overset{x_2-x_1>0}{\Longleftrightarrow} (x_1+x_2-2)>0 \Leftrightarrow x_2>2-x_1$$

Επίσης ισχύει $0<x_1<1 \Leftrightarrow 0>-x_1>-1 \Rightarrow 2-x_1>1$

$$Ά\rho\alpha\ 2-x_1\in[x_1,x_2]\ \ o\pi ό\tau\varepsilon\ f(2-x_1)<0$$

Δ4.

$$2f(x)+\ ln3=1+f'(x_2)(x-x_2)$$

f κυρτή στο $(0,+\infty)$ εφαπτομένη της C_f στο x_2 είναι

$$\varepsilon: y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y-0=f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y=f'(x_2)(x-x_2)$$

Οπότε η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη εκτός του σημείου επαφής , οπότε είναι $\boxed{f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)}$ (1) η ισότητα ισχύει μόνο για $\chi=x_2$

Επίσης είναι $f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 1-\ ln3\ \Leftrightarrow \boxed{f(x)+ln3\geq 1}$ (2)

$$\eta\ \iota\sigma ό\tau\eta\tau\alpha\ \iota\sigma\chi ύ\varepsilon\iota\ \mu ό\nu o\ \gamma\iota\alpha\ \chi=1\ (\ x_2>1\ )$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$2f(x)+ln3>1+f'(x_2)(x-x_2)$$

Άρα η εξίσωση $2f(x)+ln3=1+f'(x_2)(x-x_2)$ δεν έχει λύση .