ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΟΚΤΩ (8)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.135

Α2.Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.51

Α3.Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.23

Α4.

α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ.Σωστό

ε.Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f : R \to R$$

$$f(x+1) = (x+1)e^{-x} \quad , x \in R$$

Θέτω $x+1=\omega \Rightarrow x=\omega-1 \ \tau o \tau \varepsilon \ \omega \in R$

$$f(\omega) = \omega \cdot e^{-\omega+1} \quad ,\omega \in R$$

$$Ά\rho\alpha \ f(x) = xe^{1-x} \quad , x \in R$$

B2.

f συνεχής και παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $\chi \in R$.

$f'(x) = e^{1-x} + xe^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x) \quad , x \in R$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Η f συνεχής στο $(-\infty, 1]$και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Η f συνεχής στο $[1, +\infty)$ $\kappa\alpha\iota$ $f'(x) < 0$ για κάθε $\chi \in (1, +\infty)$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Η f έχει ολικό μέγιστο για χ=1 το $f(1) = 1e^0 = 1$

B3.

$$f(x) = xe^{1-x}$$

$$f'(x) = (1-x)e^{1-x}$$

$$f''(x) = -e^{1-x} + (1-x)e^{1-x}(1-x)' = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x}$$
$$= e^{1-x}(-1-1+x) = e^{1-x}(x-2) \quad , x \in R$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

Η f συνεχής στο $(-\infty, 2]$ και $f''(x) < 0$ $\sigma\tau o$ $(-\infty, 2)$οπότε f κοίλη στο (-∞, 2]

Ηf συνεχής στο $[2, +\infty)$και $f''(x) > 0$ $\sigma\tau o$ $(2, +\infty)$οπότε f κυρτή στο $[2, +\infty)$

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A\big(2, f(2)\big)$ή $A\left(2, \frac{2}{e}\right)$

Δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού f συνεχής στο R

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = 0$ άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την y=0 (άξονας χ'χ)

$$\lim_{\chi\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x}$$

Θέτω y= 1-x άρα $y \to +\infty$ οπότε $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$ οπότε δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

B4.

i. $\lim\limits_{\chi\to-\infty} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{\chi\to-\infty} \mathrm{xe}^{1-\mathrm{x}} = -\infty$

$\lim\limits_{\chi\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{\chi\to-\infty} \mathrm{e}^{1-\mathrm{x}} = +\infty$

A1 $=f\big((-\infty, 1]\big) = \left(\lim\limits_{\chi\to-\infty} \mathrm{f}(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$ εφόσον f αύξουσα και συνεχής

A2$= f\big([1, +\infty)\big) = \left(\lim\limits_{\chi\to+\infty} \mathrm{f}(x), f(1)\right] = (0,1]$ εφόσον f φθίνουσα και συνεχής

Αφού $f(1) = 1 \, και \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$f(A) = A1 \cup A2 = (-\infty, 1]$$

ii. $f(x) = \lambda$

αν $\lambda < 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία μόνο ρίζα $\chi_1 \in (-\infty, 1)$ αφού η fείναι γν.αύξουσα στο $(-\infty, 1)$

αν $0 < \lambda < 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς 2 ρίζες $\chi_1 \in (-\infty, 1)$ και $\chi_2 \in (1, +\infty)$ αφού η fείναι γν.αύξουσα στο $(-\infty, 1)$ και γν.φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

αν λ=0 τότε η εξίσωση f(x) = λ έχει ακριβώς μια ρίζα τη χ=0

αν λ=1 τότε η εξίσωση f(x) =λ έχει ακριβώς μια ρίζα χ=1

αν λ>1 δεν έχει ρίζες

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Για $x<0$ η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3-3x^2-x+1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής ως τριγωνομετρική. Για $x=\frac{3\pi}{2}$: $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x)=0=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ άρα είναι συνεχής. Για $x=0$:

$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1,$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(\sigma\upsilon\nu x)=1,$$

$f(0)=1.$

Αφού $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)=1\in R,$ η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0, άρα και σε όλο το πεδίο ορισμού της.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x}=-1\in R,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0\in R.$$

Αφού, $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2.i. Για $x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, η f είναι συνεχής από το ερώτημα Γ1. Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$, η $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη ως τριγωνομετρική με $f'(x)=-\eta\mu x$. Επίσης, $f(0)=1\neq0=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, άρα δεν ικανοποιείται μόνο η τελευταία προϋπόθεση του Θεωρήματος Rolle.

ii. Έχουμε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow-\eta\mu\xi=0\Leftrightarrow\eta\mu\xi=\eta\mu0\Leftrightarrow\xi=2\kappa\pi\quad ή\quad\xi=2\kappa\pi+\pi,\kappa\in Z.$ Επιπλέον, $0<\xi<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow0<2\kappa\pi<\frac{3\pi}{2},\kappa\in Z\Leftrightarrow0<\kappa<\frac{3}{4},\kappa\in Z,$ που δεν υπάρχει τέτοιο κ. Ακόμα, $0<\xi<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow0<2\kappa\pi+\pi<\frac{3\pi}{2},\kappa\in Z\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<\kappa<\frac{1}{4},\kappa\in Z,$ που σημαίνει ότι $\kappa=0$ άρα $\xi=\pi,$ η μοναδική λύση που ψάχναμε.

Γ3. Για να είναι η εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα χ΄χ και σε σημείο με αρνητική τετμημένη, αρκεί να υπάρχει $x_0<0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Για $x<0$: η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3-3x^2-x+1$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1$. Άρα, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2-6x-1=0$, με $\Delta=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0$, αφού $\alpha<-3$, που σημαίνει ότι η εξίσωση $f'(x_0)=0$ είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη με τον άξονα χ΄χ.

Γ4. Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f. Από το ερώτημα Γ2i. ξέρουμε ότι $f'(x)=-\eta\mu x, x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$. Από Γ3, έχουμε ότι $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1, x\in(-\infty,0)$.

Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$: $f'(x)=0 \overset{\Gamma 2ii.}{\Leftrightarrow} x=\pi$. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ ως πολυωνυμική, άρα θα διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Για $x<0$ από Γ3, έχουμε ότι $f'(x)<0$ αφού $\Delta<0$ και $3\alpha<0$. Άρα,

x	$-\infty$ 0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$3\alpha x^2-6x-1$	-		
$-\eta\mu x$		-	+
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	↘	↘	↗

Αφού $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$ και $f'\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$.

Για $x\in(-\infty,0]$ η f είναι συνεχής (από Γ1), $f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Για $x\in[0,\pi]$ η f είναι συνεχής (από Γ1), $f'(x)<0$ για $x\in(0,\pi)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Δηλαδή, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\pi]$. Για $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ η f είναι συνεχής, $f'(x)>0$ για $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$. Για $x=\pi$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi)=-1$. Άρα, $f(x)\geq f(\pi)$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$ δηλαδή $f(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $\ln x - \frac{1}{x} = 0$ με $x > 0$. Θεωρούμε

$t(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$ η οποία είναι συνεχής παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$t'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η t είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ οπότε έχει μία το πολύ ρίζα.

Η t είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e] \subseteq (0, +\infty)$

Ισχύει $t(1) = -1 < 0$ και $t(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$ άρα $t(1) \cdot t(e) < 0$ οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$t(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$. Πράγματι η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση η οποία ανήκει στο διάστημα $(1, e)$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x \cdot x_0}$

αφού από Δ1 το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της (1) και ισχύει $\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$

Έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x \cdot x_0} = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ και

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x \cdot x_0} > 0 \Leftrightarrow x > x_0$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x \cdot x_0} < 0 \Leftrightarrow x < x_0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 το

$$f(x_0) = \ln x_0 \cdot (x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1 = \frac{1}{x_0}(x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1 = 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = h(x)$ έχει ακριβώς μία λύση, δηλαδή ότι η εξίσωση $x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ έχει μία λύση στο $\mathbb{R}$.

Όμως $\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$άρα για $x \le 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $xe^{-x} \le 0$, επομένως για $x > 0$ η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\ln\left(x \cdot e^{-x}\right) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = \ln\left(x_0\right)^{x+1} - \ln e^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\ln x - x = \left(x+1\right)\ln x_0 - x - 1 \Leftrightarrow 0 = \left(x+1\right)\ln x_0 - \ln x - 1 \Leftrightarrow f\left(x\right) = 0$$

Από Δ2 η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο x_0 το $f\left(x_0\right) = 0$, άρα για κάθε $x \in \left(0, x_0\right) \cup \left(x_0, +\infty\right)$ ισχύει ότι $f\left(x\right) > 0$. Τελικά η f έχει μοναδική ρίζα την x_0 και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g, h έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη x_0.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'\left(x\right) = \left(1-x\right)e^{-x}$ και η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'\left(x\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \left(\ln x_0 - 1\right)$$

Για να έχουν λοιπόν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g, h κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο αρκεί να ισχύει:

$$g'\left(x_0\right) = h'\left(x_0\right) \Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \left(\ln x_0 - 1\right) \; (2)$$

Όμως από Δ2 ισχύει ότι $f\left(x_0\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\ln x_0\right)\left(x_0+1\right) - \ln x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x_0\right)^{x_0+1} = \ln x_0 + 1 \Leftrightarrow \left(x_0\right)^{x_0+1} = e^{\ln x_0 + 1} \Leftrightarrow \left(x_0\right)^{x_0+1} = e \cdot x_0 \; (3).$$

Οπότε η σχέση (2) με τη βοήθεια της (3) και της $\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$ από το Δ1 γίνεται:

$$\frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{\left(x_0\right)^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot \left(\ln x_0 - 1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_0}} - \frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{e \cdot x_0}{e^{x_0+1}}\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_0}} - \frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{e \cdot x_0}{e^{x_0+1}}\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_0}} - \frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_0}} - \frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{1}{e^{x_0}} - \frac{x_0}{e^{x_0}} \Leftrightarrow 0 = 0$$

που ισχύει. Πράγματι λοιπόν, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g, h έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο

Δ4. Η απόσταση των σημείων A, B υπολογίζεται από τη συνάρτηση

$d(x)=\sqrt{(x-x)^2+\left(f(x)-\varphi(x)\right)^2}=\left|f(x)-\varphi(x)\right|,\ x>0$. Ισχύει ότι $f(x)>\varphi(x), x>0$ από υπόθεση άρα τελικά $d(x)=f(x)-\varphi(x), x>0$. Αφού η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη στο $x=x_0$, η συνάρτηση d παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=x_0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^{η} Περίπτωση: Αν η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε:

- η d είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- η d παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0
- το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$, αφού $x_0 \in (1,e)$

από θεώρημα Fermat ισχύει ότι: $d'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-\varphi'(x_0)=0 \Leftrightarrow 0=\varphi'(x_0)$ άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ

2^{η} Περίπτωση: Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο εξ΄ορισμού

Επομένως σε κάθε περίπτωση το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ