ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Θέμα Α:

Α1. Θεωρία σχ. βιβλίου σελ. 111

Α2. Θεωρία σχ. βιβλίου σελ. 104

Α3. Θεωρία σχ. βιβλίου σελ. 74

Α4. **α)** Ψ

β) Αν θεωρήσουμε $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, ενώ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ και $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, άρα το όριο της $\frac{1}{f(x)}$ στο $x_0 = 0$ δεν υπάρχει.

Α5. **α)** Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

Θέμα Β:

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{3x_1+1}{x_1-3} = \dfrac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x_1x_2 - 9x_1 + x_2 - 3 = 3x_1x_2 - 9x_2 + x_1 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x_1x_2 - 9x_1 + x_2 - 3 = 3x_1x_2 - 9x_2 + x_1 - 3 \Leftrightarrow 10x_2 = 10x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη

Β2 .

Λύνω $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3} = y \Leftrightarrow 3x + 1 = xy - 3y \Leftrightarrow 3x - xy = -3y - 1$

$\Leftrightarrow x(3 - y) = -3y - 1 \overset{y\neq 3}{\Leftrightarrow} x = \frac{-3y-1}{3-y} = f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-3}$

Άρα ορίζεται η $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}\ με\ χ \in R - \{3\}$

Άρα πράγματι ισχύει ότι $f = f^{-1}$

Β3.

Ισχύει ότι $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ άρα για το $D_{f\circ f}$ έχουμε:

$D_{f\circ f} = \{\ x \in Df\ \kappa\alpha\iota\ f(x) \in Df\} = \left\{x \neq 3\ \kappa\alpha\iota\ \frac{3x+1}{x-3} \neq 3\right\} = \{x \neq 3\ \kappa\alpha\iota\ 3\chi + 1\ \neq 3\chi - 9\ \} = \{\chi \neq 3\ \kappa\alpha\iota - 10\ \neq 0\ \ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \forall\chi \in R\}$

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

Με $(fof)(x) = f\big(f(x)\big) = \dfrac{3\left(\frac{3x+1}{x-3}\right)+1}{\frac{3x+1}{x-3}-3} = \dfrac{\frac{9x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x-3}}{\frac{3x+1}{x-3}-\frac{3x-9}{x-3}} = \dfrac{\frac{10x}{x-3}}{\frac{10}{x-3}} = \dfrac{10x}{10} = x,\ \ x \in \mathbb{R} - \{3\}$

Άρα $(fof)(x) = \ x\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in R - \{3\}$

B4.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} f(x)\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)$$

Ισχύει ότι

$\left|f(x)\cdot\eta\mu\ \left(\frac{1}{3\chi+1}\right)\right| \leq |f(x)|\ ,\forall x \in R - \left\{-\frac{1}{3},3\right\} \Leftrightarrow -|f(x)| \leq f(x)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{3\chi+1}\right) \leq |f(x)|$

αφού $\left|\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right| \leq 1$ για κάθε $x \neq -\dfrac{1}{3}$

- $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}(-|f(x)|) = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(-\left|\frac{3x+1}{-x-3}\right|\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}|f(x)| = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής το ζητούμενο όριο είναι

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}} f(x)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{3\chi+1}\right) = 0$$

Θέμα Γ:

Γ1. Για το εμβαδό του τριγώνου ισχύει ότι:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}(\mathrm{AM})\cdot(\mathrm{B\Gamma})\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΜ έχουμε: $\dfrac{(\mathrm{BM})}{(\mathrm{OB})} = \eta\mu\theta \Leftrightarrow (\mathrm{BM}) = \eta\mu\theta\cdot(\mathrm{OB})$

Ακόμα έχουμε ότι $\mathrm{E}(\theta) = \eta\mu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$

Επομένως αφού (ΒΓ)=2(ΒΜ)=2ημθ και (ΑΜ)=(ΟΑ)+(ΟΜ)=1+συνθ έχουμε $\mathrm{E}(\theta) = \eta\mu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$

Γ2. Για τη συνάρτηση εμβαδού Ε, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως άθροισμα και γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$E'(\theta) = \big((1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta\big)'$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta) + (-\eta\mu\theta)\cdot\eta\mu\theta$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta = \sigma\upsilon\nu 2\theta + \sigma\upsilon\upsilon\nu\theta$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\theta = -\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\theta = \sigma\upsilon\nu(\pi-\theta) \overset{\theta\in(0,\pi)}{\Longleftrightarrow} 2\theta = \pi - \theta$$

$\Leftrightarrow 3\theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ (μοναδική). Η E' είναι συνεχής στα διαστήματα $(0,\pi/3)$ και $(\pi/3,\pi)$, δε μηδενίζεται σε αυτά άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από αυτά

$$E'(\pi/6) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$$

$$E'(\pi/2) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$E'(\theta) > 0 \text{ για } x \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$E'(\theta) < 0 \text{ για } x \in \left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$$

άρα E γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$, με μέγιστη τιμή $E(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Επομένως το εμβαδόν μεγιστοποιείται για γωνία $\theta = \frac{\pi}{3}$

Γ3. Από υπόθεση θέλουμε $E(\theta) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta = \frac{3}{4}$

Δεδομένης της συνέχειας και της μονοτονίας της E (βλ. ερώτημα **Γ2**) θα ισχύει:

- Για $\theta \in (0,\pi/3]$: $E\big((0,\pi/3]\big) = \left(\lim_{\theta\to0^+} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right] = E(A_1)$

αφού $\lim_{\theta\to0^+} E(\theta) = \lim_{\theta\to0^+}\big((1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta\big) = 0$

- Για $\theta \in [\pi/3,\pi)$: $E\left([\frac{\pi}{3},\pi)\right) = \left(\lim_{\theta\to\pi^-} E(\theta), E(\pi/3)\right] = \left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right] = E(A_2)$

αφού $\lim_{\theta\to\pi^-} E(\theta) = \lim_{\theta\to\pi^-}(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta = 0$

Άρα:

- $\frac{3}{4} \in E(A_1)$, άρα θα υπάρχει $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ ώστε $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$ και E γνησίως αύξουσα άρα θ_1 μοναδικό.
- $\frac{3}{4} \in E(A_2)$, άρα θα υπάρχει $\theta_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$, ώστε $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$ και E γνησίως φθίνουσα άρα θ_2 μοναδικό.

με $(\theta_1 < \theta_2)$

Γ4. E συνεχής στο $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ ως τριγωνομετρική.

E παραγωγίσιμη στο $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$

Από Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ τέτοια ώστε

$$E'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} = E'(\xi_1) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)$$

$$E'(\xi_2) = \frac{f(\theta_2) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} = E'(\xi_2) \cdot \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right)$$

Άρα $E'(\xi_1) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = E'(\xi_2) \cdot \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα f' είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 στο $(0,+\infty)$ με μοναδική ρίζα την $x = 1$ αφού $f'(1) = 0$. Ισχύει:

- Για $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$
- Για $0 < x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = -\ln\lambda$

Το σημείο του ακροτάτου είναι το $M(1, -\ln\lambda)$, $\lambda > 0$ το οποίο ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: x = 1$ για κάθε $\lambda > 0$

Δ2. Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:
$x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x\ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ και αφού η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο το $f(1) = -\ln\lambda$ από το **Δ1**, πρέπει $-\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$. Τελικά $\lambda \in (0,1]$, άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι η $\lambda = 1$

Δ3. Για $x > 0$ η g γράφεται $g(x) = e^{x\ln x}$ οπότε είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = x^x(\ln x + 1)$.

Έστω $\mathrm{M}(x_0, g(x_0))$, $x_0 > 0$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης και της C_g τότε $\varepsilon : y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$. Η ε διέρχεται από το $(0,0)$ άρα ισχύει:
$0 - g(x_0) = g'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow -x_0^{x_0} = x_0^{x_0}(\ln x_0 + 1)(-x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -1 = (\ln x_0 + 1)(-x_0) \Leftrightarrow \ln x_0 - \dfrac{1}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$. Από **Δ1** η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 και τελικά $f'(x_0) = f'(1) \Leftrightarrow x_0 = 1$. Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $\varepsilon : y - 1 = 1(x - 1)$ δηλαδή η $\varepsilon : y = x$

Δ4.

i) Για κάθε $x > 0$ η h γράφεται $h(x) = e^{x\ln x}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:
$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim\limits_{u\to 0^-} e^u = 1$ αφού θέσουμε $x\ln x = u$ με

$$u_0 = \lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x} = 0$$ το

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ άρα $u < 0$ οπότε $u_0 = 0^-$

Το $h(0) = 1$ άρα η h είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ άρα τελικά στο $[0,+\infty)$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{H}(x) = x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt\right) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)\,dt$ με $x \in \mathbb{R}$

- Η συνάρτηση H είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική
- $\mathrm{H}(0) = \int_0^1 h(1-t)\,dt$
- $\mathrm{H}(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt$

Όμως από **Δ2** για $\lambda = 1$ ισχύει ότι $x^x \geq x$ για $x > 0$ η ισότητα ισχύει για μόνο $x = 1$ άρα

$$\int_1^2 g(t)\,dt > \int_1^2 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\int_1^2 g(t)\,dt > 3 \Leftrightarrow 3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt < 0 \Leftrightarrow \mathrm{H}(1) < 0$$

Επίσης από **Δ2** ισχύει ότι $x^x \geq x$ για $x > 0$ άρα $h(x) \geq x$ για κάθε $x > 0$, το $h(0) = 1 > 0$ οπότε τελικά ισχύει $h(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Για $t \in [0,1]$ το $(1-t) \in [0,1]$ οπότε η ανισότητα γίνεται $h(1-t) \geq 1-t$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $t = 0$ άρα

$$\int_0^1 h(1-t)\,dt > \int_0^1 (1-t)\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 h(1-t)\,dt > \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 h(1-t)\,dt > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{H}(0) > 0$$

Άρα $\mathrm{H}(0) \cdot \mathrm{H}(1) < 0$ και από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{H}(x_0) = 0$ δηλαδή $x_0^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt\right) + (1 - x_0)\int_0^1 h(1-t)\,dt = 0$