ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

Θέμα Α:

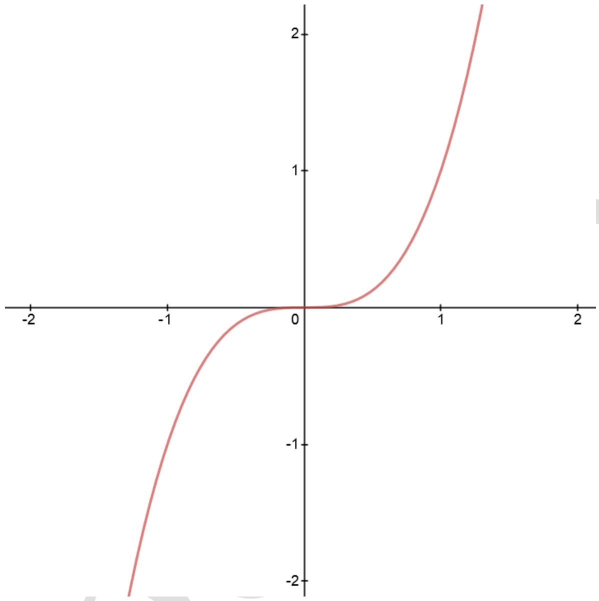
Α1. Θεωρία σχ. Βιβλίου σελ. 76

Α2. Θεωρία σχ. Βιβλίου σελ. 104

Α3.

α) Ψ

β)



$f(x) = x^3$, f ,γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά $f'(x) = 3x^2$, η οποία δεν είναι πάντα θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$.

Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$\chi \in A_g \,\kappa\alpha\iota\, g(x) \in A_f$

$\chi \in R \,\kappa\alpha\iota\, e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα $A_{fog} = (0, +\infty)$ με τύπο :

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \quad , \qquad x > 0$$

Β2. Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in (0, +\infty)$είναι

$$(fog)(x_1) = (fog)(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x^1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow$$

$$(e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_1} - 1)(e^{x_2} + 2) \Rightarrow$$

$$e^{x1}e^{x2} - e^{x1} + 2e^{x2} - 2 = e^{x1}e^{x2} + 2e^{x1} - e^{x2} - 2 \Rightarrow$$

$$3e^{x2} = 3e^{x1} \Rightarrow e^{x2} = e^{x1} \Rightarrow x_1 = x_2$$

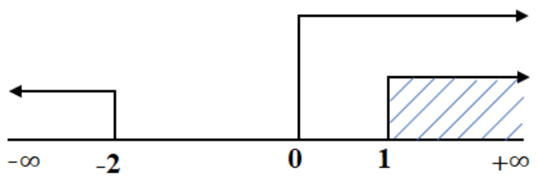
Άρα η fog είναι 1 -1 οπότε αντιστρέφεται

Θέτω (fog)(x) = $y \Rightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = y \overset{\mu\varepsilon\, y>0}{\Longleftrightarrow}$ (αφού $\frac{e^x+2}{e^x-1} > 0 \;\gamma\iota\alpha\; x > 0$)

$$e^x + 2 = ye^x - y \overset{\mu\varepsilon\, y>0}{\Longleftrightarrow} e^x - ye^x = -2 - y \overset{\mu\varepsilon\, y>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^x(1 - y) = -2 - y \overset{\mu\varepsilon\, y>0}{\Longleftrightarrow} e^x = \frac{y+2}{y-1} \overset{y\neq 1}{\Longleftrightarrow} \ln e^x = \ln\frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow$$

(με $y \neq 1$ και $y > 0$ και $\frac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-1) > 0$)



$$x = \ln\frac{y+2}{y-1} \;\mu\varepsilon\; y \in (1, +\infty)$$

Άρα $(fog)^{-1}(y) = \ln\frac{y+2}{y-1}$, $y \in (1, +\infty)$

οπότε $(\,fog\,)^{-1}(x) = \ln\frac{\chi+2}{\chi-1}\ ,x > 1$

Β3.

$\varphi(\,x) = \ln(x+2) - \ln(x-1), x > 1$ συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\varphi'(\chi) = \frac{1}{x+2}(x+2)' - \frac{1}{x-1}(x-1)' = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-2}{(x+2)(x-1)}$$
$$= \frac{-3}{(x-1)(x+2)} < 0$$

φ συνεχής στο $(1,+\infty)$ με $\varphi'(\chi) > 0$ στο $(1,+\infty)$ αφού $\chi > 1 \Leftrightarrow \chi - 1 > 0$ συνεπώς η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο (1,+∞) .

Β4.

i.

$$\lim_{x\to1^+}\varphi(x) = \lim_{x\to1^+}\ln(\frac{x+2}{x-1}) = +\infty$$

θέτουμε $\dfrac{x+2}{x-1} = y$, $\lim\limits_{x\to1^+}(x+2)\dfrac{1}{x-1} = +\infty$ επειδή

$\lim\limits_{x\to1^+}(x+2) = 3 > 0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0$ και x-1>0 όταν x>1.

άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x) = \lim\limits_{y\to+\infty}\ln y = +\infty$

ii

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{x+2}{x-1}) = 0$$

θέτουμε $\dfrac{x+2}{x-1} = y$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{y\to1}\ln y = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

f συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα και στο 0 οπότε :

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1 - \ln\lambda$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{\chi\to 0+} (\eta\mu\chi + \lambda\sigma\upsilon\nu\chi) = \eta\mu 0 + \lambda\sigma\upsilon\nu 0 = \lambda$$

Οπότε από (1) είναι : $1 - \ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda - 1 + \ln\lambda = 0$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(\lambda) = \ln\lambda + \lambda - 1\,,\ \lambda > 0$

g παραγωγίσιμη για κάθε $\lambda > 0$ με

$$g'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 1 > 0, \text{για κάθε } \lambda > 0$$

Άρα g γν. αύξουσα για $\lambda > 0$

Προφανής ρίζα της g (λ) = 0 είναι λ = 1 και αφού g γνησίως αύξουσα θα είναι και μοναδική άρα λ = 1 .

Γ2.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1 - 1 + x}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0-} \frac{x}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \lim_{x\to 0+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \epsilon R$$

Άρα ορίζεται η εφαπτομένη στο Α (0,1) με

$f'(0) = 1$ και αν ω η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ είναι $\varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$

Γ3. Κρίσιμα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι μηδέν, επομένως:

- Για $x \leq 0$: (η f παραγωγίσιμη ως ρητή)
  $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$ (οπότε δεν έχουμε κρίσιμα σημεία)
  Στο $\chi_0=0$ είναι παραγωγίσιμη η f από Γ2.
- Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$: (η f παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων)

$$\text{με} \quad f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

και είναι,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x_2 = \frac{5\pi}{4} \quad \left(\text{αφού } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

Επομένως τα κρίσιμα σημεία είναι

$K\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ άρα $K\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $\Lambda\left(\frac{5\pi}{4}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ άρα $\Lambda\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$

Γ4. Για το σημείο $M(\alpha, f(\alpha)) \to (\alpha \leq 0) \to M\left(\alpha, \frac{1}{1-\alpha}\right)$ και α μεταβλητό με το χρόνο $\alpha \to \alpha(t)$, για την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Μ ισχύει:

$$\varepsilon: y - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x - \alpha)$$

$$y = \frac{1}{(1-\alpha)^2}x - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{1}{1-\alpha}$$

$$y = \frac{1}{(1-\alpha)^2}x + \left(\frac{-\alpha + (1-\alpha)}{(1-\alpha)^2}\right)$$

$$y = \frac{1}{(1-\alpha)^2}x + \frac{-2\alpha + 1}{(1-\alpha)^2}$$

για να βρούμε τα σημεία τομής της ε με $x'x$:

Θέτουμε $y = 0 \Rightarrow \frac{1}{(1-\alpha)^2}x = \frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)^2} \Rightarrow x = 2\alpha - 1$, άρα το σημείο τομής είναι το $B(2\alpha - 1, 0)$

Επομένως το σημείο Β θα έχει τετμημένη: $x_B(t) = 2\alpha(t) - 1$

Άρα ρυθμός μεταβολής τετμημένης:

$$x'_B(t) = 2\alpha'(t) = -\frac{2}{3}\alpha(t)\ \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδες χρόνου}}$$

και τη στιγμή t_0 κατά την οποία είναι:

$$\alpha(t_0) = -1,\text{ άρα } x'_B(t) = \frac{2}{3}\ \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδες χρόνου}}$$

Θέμα Δ:

Δ1.

$$f'(x) = e^x + 2x - e$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0, x \in \mathbb{R}\text{ , άρα η } f'\text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

Η f' συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$f'(0) = 1 - e < 0$$
$$f'(1) = e + 2 - 2 > 0$$

άρα έχουμε $f'(0)\cdot f'(1) < 0$

Από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

Επειδή f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το x_0 είναι μοναδικό.

Για $x < x_0 \Rightarrow (\text{αφού η } f' \text{ αύξουσα}) \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$

άρα η f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_0]$

Για $x_0 < x \Rightarrow (\text{αφού η } f' \text{ αύξουσα}) \Rightarrow f'(x_0) < f'(x) \Rightarrow f'(x) > 0$

άρα η f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0 + \infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e\cdot x_0 - 1$

Όμως $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Rightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$

$$\text{άρα } f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - 3x_0 - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

Δ2. Ισχύει η ανίσωση:

$$-1 \le \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \le 1,\text{ για } x \ne x_0$$

$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1 \leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)}+1 \qquad (1)$$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in (0,1)$

$f(x) \geq f(x_0)$, οπότε για x κοντά στο x_0

άρα,

$$f(x)-f(x_0)>0$$

και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{(f(x)-f(x_0))}\right]=+\infty$

οπότε,

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{\left(f(x)-f(x_0)\right)}-1\right]=+\infty$$

από σχέση (1) και όριο και διάταξη, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{\left(f(x)-f(x_0)\right)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$$

Δ3.

$$f(x)+x=x_0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)+x-x_0=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0$, με $x_0 \in (0,1)$

Η g είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$g(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)$$

$$g(1)=f(1)+1-x_0=e+1-e-1+1-x_0=1-x_0>0$$

αρκεί να δείξω ότι $f(x_0)<0$

η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [0,x_0]$

$$0<x_0 \Leftrightarrow (\text{αφού η f γνησίως φθίνουσα}) \Leftrightarrow f(0)>f(x_0) \Leftrightarrow 0>f(x_0)$$

άρα $g(x_0)\cdot g(1)<0$

άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in$ (x_0,1), τέτοιο ώστε:

$$g(\rho)=0 \Leftrightarrow$$

$$f(\rho)+\rho-x_0=0 \Leftrightarrow f(\rho)+\rho=x_0$$

Η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$g'(x) = f'(x) + 1 > 0$, για κάθε $x \geq x_0$ αφού για $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow$
$f'(x) + 1 > 0 + 1 > 0$

Άρα η g γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$, άρα η g έχει το πολύ μία ρίζα και άρα το $\rho \in (x_0, 1)$ είναι μοναδικό.

Δ4. Η ζητούμενη ανίσωση γίνεται:

$$f(x_0) > f(\rho) \cdot f'(\kappa) + f(\rho) \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) - f(\rho) > f(\rho) \cdot f'(\kappa), \text{ με } \kappa \in (\rho, 1)$$

Όμως $f(\rho) = x_0 - \rho$ από Δ3 και $x_0 < \rho$, άρα $f(\rho) < 0$

$$\frac{f(x_0) - f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa), \kappa \in (\rho, 1)$$

$$\frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa), \kappa \in (\rho, 1)$$

$$\frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(\kappa), \kappa \in (\rho, 1)$$

η f συνεχής στο $[x_0, \rho]$

η f παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ) με f′ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε,

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0}$$

Όμως,

$$x_0 < \xi < \rho < \kappa < 1 \Leftrightarrow (\text{αφού } f' \text{ γνησίως αύξουσα}) \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(\kappa)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(\kappa), \kappa \in (\rho, 1)$$