ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΝΝΙΑ (9)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. α) Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 15

β) i) όταν η συνάρτηση f είναι ΄΄1-1΄΄

ii) θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 36

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 142

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 135

Α4. α) Λάθος. Το θεώρημα ισχύει για διάστημα και όχι για ένωση διαστημάτων που είναι το σύνολο Α.

Π.χ.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad x>0 \\ -1 & \alpha\nu \quad x<0 \end{cases}$$

Είναι $f'(x)$ για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ αλλά δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

β) Λάθος. Η πρόταση ισχύει όταν η f είναι συνεχή στο x_0. Π.χ.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu \quad x\neq 1 \\ 3 & \alpha\nu \quad x=1 \end{cases}$$

τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$ ενώ f(1)=3

Α5.

$$\int_\alpha^\delta f(x)dx - \int_\beta^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\delta f(x)dx$$
$$= \mathrm{E}(\Omega_1) - \mathrm{E}(\Omega_2) + \mathrm{E}(\Omega_3) = 2 - 1 + 3 = 4$$

Σωστό είναι το **γ.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y=2 οπότε θα είναι $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2) = 0 => \lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda) = 2 <=> 0+\lambda = 2$ άρα λ=2

Β2. f(x) $= e^{-x} + 2$

$f(x) - x = 0 <=> e^{-x} + 2 - x = 0$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = e^{-x} - x + 2, x \in R$

g συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$g(2) = e^{-2} - 2 + 2 = \frac{1}{e^2} > 0$

$g(3) = e^{-3} - 3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$

Οπότε $g(2)\cdot g(3) < 0$ άρα από Θ.Β. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 <=> e^{-x_0} - x_0 + 2 = 0 <=> f_{(x_0)} - x_0 = 0$

g παραγωγίσημη στο [2,3] ως άθροισμα παρ/μων συναρτήσεων με

$g'(x) = (e^{-x} - x + 2)' = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0$ για κάθε $x \in R$ οπότε g γν. φθίνουσα στο R άρα και 1-1 οπότε έχει το πολύ μια ρίζα στο R. Τελικά η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $x_0 \in (2,3)$

Β3.

$f(x) = e^{-x} + 2$ παραγωγίσημη στο R με $f'(x) = (e^{-x} + 2)' = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in R$ οπότε f γν. φθίνουσα στο R άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται

$f(x) = y <=> e^{-x} + 2 = y$

$e^{-x} = y - 2 \quad (y > 2)$

$lne^{-x} = \ln(y-2) \quad (y>2)$

$-x = \ln(y-2) \quad (y>2)$

$x = -\ln(y-2) \quad (y>2)$

Όμως $f^{-1}(y) = x$ $άρα$ $f^{-1}(y) = -\ln(y-2)\,, y>2$

$τελικά$ $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ $με$ x >2

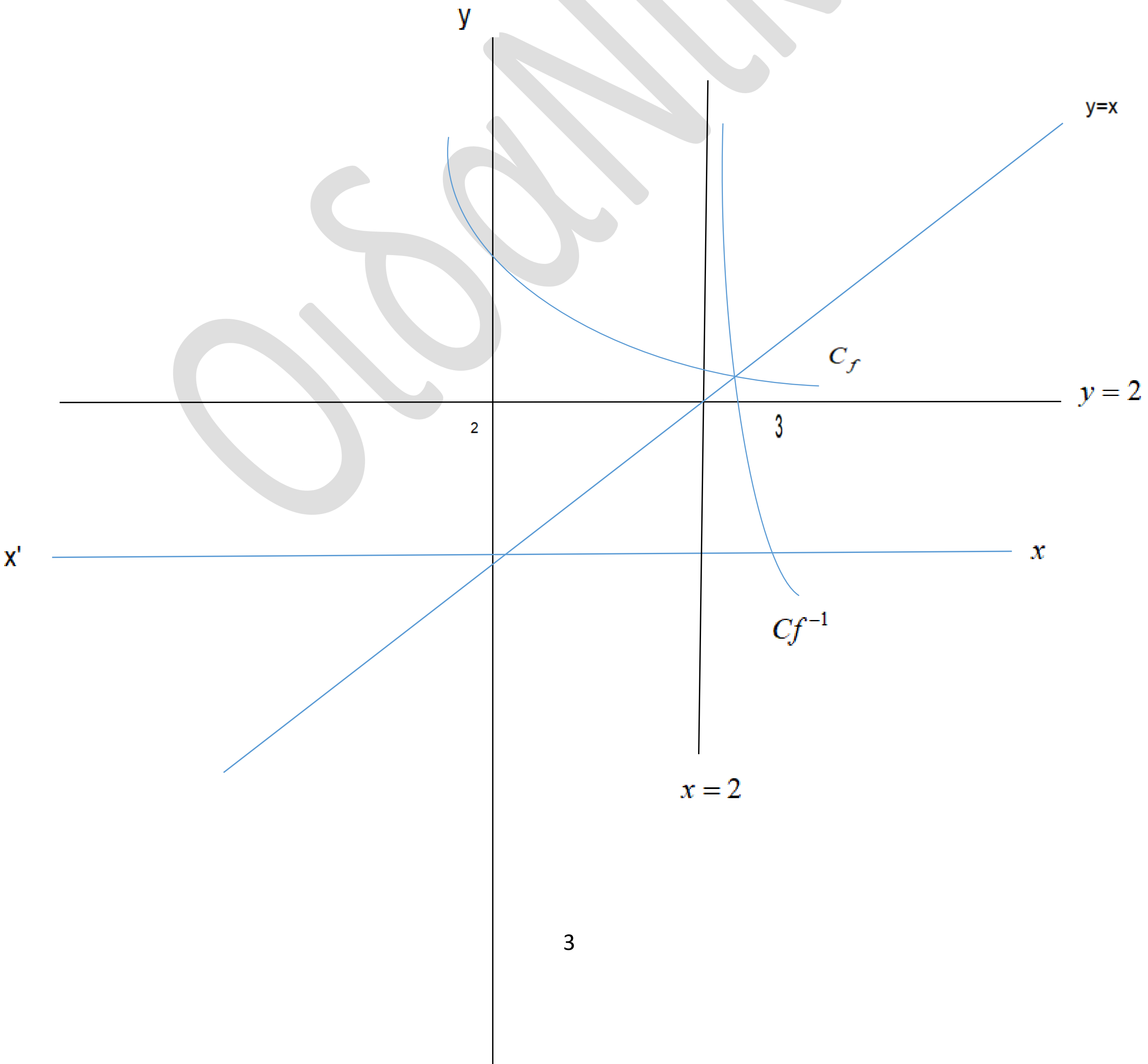
B4.

$f^{-1}(x) = -\ln(x-2)\,, x>2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}_{(x)} = \lim\limits_{x\to 2^+}[\ln(x-2)]$. Θέτουμε x-2=u $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0$

οπότε έχουμε $\lim\limits_{\upsilon\to 0^+}(-\ln(u)) = -\lim\limits_{u\to 0^+} lnu = +\infty$

οπότε κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf^{-1} είναι x=2.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, θα είναι και συνεχής στο R που σημαίνει ότι η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής και στο $x=1$. Επομένως, παίρνουμε τις σχέσεις:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\in R.$ Από την πρώτη σχέση έχουμε,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=1^2+\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1+\alpha=e^0+\beta=1+\alpha \Leftrightarrow 1+\beta=1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta \qquad (1)$$

Από την δεύτερη σχέση έχουμε,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\Leftrightarrow$$
$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1}\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\frac{\alpha x-\alpha}{x-1}\right). \quad (2)$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\underset{D.L.H.}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{x-1}\cdot(x-1)'}{1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{x-1}}{1}=e^0=1,$ άρα η σχέση (2) γίνεται:

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\alpha x-\alpha}{x-1}\Leftrightarrow 2=1+\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\alpha(x-1)}{x-1}\Leftrightarrow 2=1+\alpha\Leftrightarrow \alpha=1.$ και από την σχέση (1) $\beta=1.$

Γ2. Για $\alpha=\beta=1$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1\\ e^{x-1}+x, & x<1\end{cases}$

- Για $x>1$: $f'(x)=2x>0$ για κάθε x>1 άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
- Για $x<1$: $f'(x)=e^{x-1}\cdot(x-1)'+1=e^{x-1}+1>0,$ αφού $e^{x-1}>0.$, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$

Λόγω της συνέχειας της f στο R, η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$$f\left((-\infty,+\infty)\right)\underset{f\,\text{ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ}}{\overset{f\,\text{ΣΥΝΕΧΗΣ}}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty) \text{ αφού,}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=0-\infty=-\infty,$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1}=0,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty.$

Γ3. i.

$$f\left((-\infty,0)\right)\underset{f\,\text{ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ}}{\overset{f\,\text{ΣΥΝΕΧΗΣ}}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to0}f(x)\right)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right),$$ Το $0\in(-\infty,\frac{1}{e})$ άρα

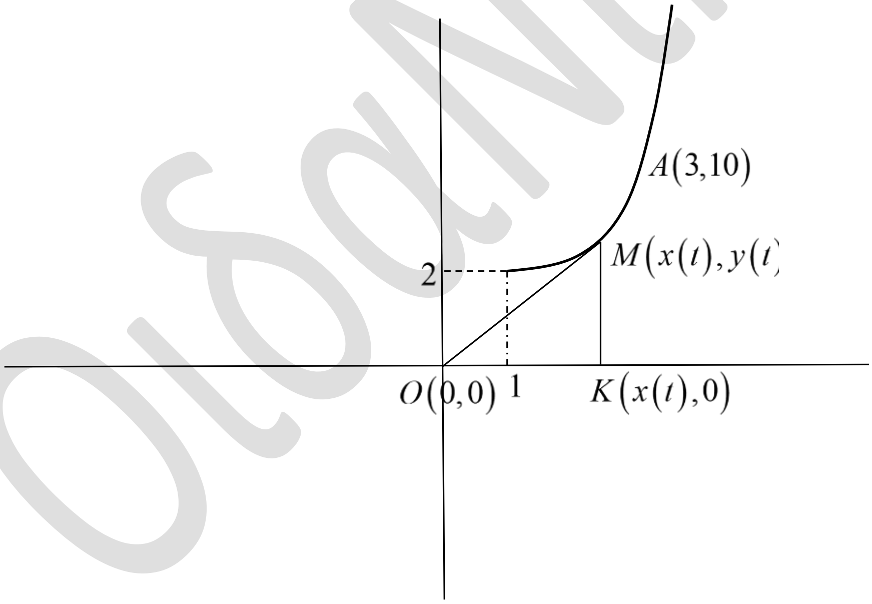
υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-\infty,0)$ άρα x_0 αρνητικός, τέτοιο ώστε

$f(x_0)=0,$ και είναι μοναδικό αφού f γνησίως αύξουσα στο R.

Γ3. ii. Έστω ότι υπάρχει μία λύση $x_1\in(x_0,+\infty)$ της εξίσωσης $f^2(x)-x_0\cdot f(x)=0.$ Άρα $f^2(x_1)-x_0\cdot f(x_1)=0,$ και επειδή $f(x_1)\neq0$ αφού η f έχει μοναδική ρίζα το x_0 (από Γ3i) τότε $\dfrac{f^2(x_1)}{f(x_1)}-x_0\dfrac{f(x_1)}{f(x_1)}=0\Leftrightarrow f(x_1)-x_0=0\Leftrightarrow f(x_1)=x_0<0$

ΑΤΟΠΟ διότι $x_1>x_0\overset{f\ \text{ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ}}{\Longleftrightarrow}f(x_1)>f(x_0)<=>f(x_1)>0.$

Γ4. Για $t=t_0$ ισχύει $x(t_0)=3,$ $\text{f}(\text{x}(t_0))=10$ και $\text{x}'(\text{t})=2$μον/s.



Επομένως, το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΚ ισούται

$E=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon$

$$\text{E}(t)=\frac{1}{2}\text{x}(t)\cdot f\big(x(t)\big)=\frac{1}{2}\text{x}(t)(x^2(t)+1)=\frac{1}{2}x^3(t)+\frac{1}{2}\text{x}(t),\mu\varepsilon\ x(t)\geq1,t\geq0.$$

Άρα, $E'(t)=\frac{1}{2}3x^2(t)\cdot x'(t)+\frac{1}{2}x'(t),\mu\varepsilon\ x(t)\geq1,t\geq0.$

Τελικά,

$E'(t_0) = \frac{1}{2}3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) + \frac{1}{2}x'(t_0) = \frac{1}{2}3 \cdot (3)^2 \cdot 2 + \frac{1}{2}2 = 28 \tau\varepsilon\tau\rho. \mu o\nu/s.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1: Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \ln\left(x^2-2x+2\right) + (x-1)\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2} + \alpha = \ln\left(x^2-2x+2\right) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} + \alpha$$

Αφού η ευθεία (ε): $y=-x+2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(1,1)$ θα ισχύει $f'(1)=-1$ και $f(1)=1$. Δηλαδή: $f'(1)=-1 \Leftrightarrow \alpha=-1$ οπότε $f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=2$.

Τελικά ο τύπος της f είναι ο $f(x)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$, $x \in R$

Δ2: Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_1^2 \left| f(x) - (-x+2) \right| dx = \int_1^2 \left| (x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right) \right| dx$$

Για $x \in [1,2]$ ισχύουν: $1 \le x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x-1 \le 1$ και

$\ln\left(x^2-2x+2\right) \ge 0 \Leftrightarrow x^2-2x+2 \ge 1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$ που ισχύει για κάθε $x \in R$. Άρα $(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right) \ge 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_1^2 (x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x-2)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x^2-2x+2\right)'\ln\left(x^2-2x+2\right)dx.$$

Θέτουμε $x^2-2x+2=u$ άρα $(2x-2)dx=du$ και για $x=1$ το $u=1$, για $x=2$ το $u=2$

Οπότε: $\mathrm{E}(\Omega) = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln u\, du = \frac{1}{2}\int_1^2 (u)'\ln u\, du = \frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 1 du =$

$$= \frac{1}{2}2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[u\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{2\ln 2 - 1}{2}\, \tau.\mu.$$

Δ3: i) Ά τρόπος:

Από Δ1 $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$ οπότε από Δ2

$\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0$ και $\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$ αφού $x^2-2x+2>0$, $x\in R$. Άρα

$\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$ ως άθροισμα μη αρνητικών όρων και τελικά

$\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1\Leftrightarrow f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in R$.

Β΄τρόπος:

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με

$$f''(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{4(x-1)\left(x^2-2x+2\right)-2(x-1)^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2(x-1)\left(x^2-2x+2\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}.$$

Ισχύει ότι $x^2-2x+2>0$, $x\in R$ και $\left(x^2-2x+2\right)^2>0$, $x\in R$ οπότε $f''(x)=0\Leftrightarrow x=1$ και $f''(x)>0\Leftrightarrow x>1$, $f''(x)<0\Leftrightarrow x<1$. Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 το $f'(1)=-1$. Άρα για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)\geq -1$.

Δ3: ii) Α΄τρόπος

Η ανίσωση γίνεται: $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)+\lambda,\lambda\in R(1)$$

Έστω $h(x)=f(x)+x, x\in R$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=f'(x)+1, x\in R$

Ισχύει ότι $h'(x)\geq 0, x\in R$ από Δ3 i) και η h' μηδενίζεται σε μεμονωμένο σημείο το $x=1$ αφού: από Δ3 i) η f' παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $f'(1)=-1$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο R και η (1) γίνεται:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)+\lambda\Leftrightarrow h\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq h(\lambda)\Leftrightarrow\lambda+\frac{1}{2}\geq\lambda\Leftrightarrow\frac{1}{2}\geq 0$$

που ισχύει.

Β΄τρόπος

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\geq-1\quad(2)$$

Η f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ άρα από Θεώρημα

Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}.$$

Άρα από (2) $f'(\xi)\geq-1$ που ισχύει αφού για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)\geq-1$.

Δ4: Έστω ότι οι γραφικές συναρτήσεις των f και g παρουσιάζουν κοινή εφαπτομένη στα σημεία $\mathrm{A}(x_1, f(x_1)), \mathrm{B}(x_2, g(x_2))$ αντίστοιχα.

Πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2)$, όμως από Δ3.1) ισχύει ότι $f'(x_1) \geq -1$

και $g'(x_2) = -3{x_2}^2 - 1 \leq -1, x \in R$ άρα $g'(x_2) \leq -1$, $x_2 \in R$

Για να είναι ίσα πρέπει $f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow x_1 = 1$ και $g'(x_2) = -1 \Leftrightarrow x_2 = 0$

Άρα $f'(1) = -1 \kappa\alpha\iota f(1) = 1$ και $(\varepsilon): y = -x + 2$ η εφαπτομένη.

$g'(0) = -1$ και $g(0) = 1$με$(\varepsilon): y = -x + 2$ η εφαπτομένη.

Τελικά η $(\varepsilon): y = -x + 2$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη.

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών ΟιδαΝικώ