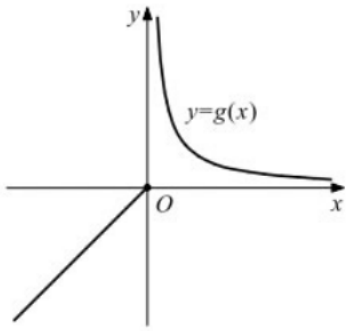
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ. 99
Α2. α. ψευδής

β. $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$



Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 216
Α4. α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Σωστό

Β1.

$$f(x)=x-\frac{4}{x^2},\quad x\neq 0$$

f παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq 0$ με

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=1+8x^{-3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2	0 $\qquad$ $+\infty$
x^3+8	-	+	+
x^3	-	-	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

- f συνεχής στο $(-\infty,-2]$, $f'(x)>0$ $\sigma\tau o$ $(-\infty,-2)$, άρα f γν. αύξουσα στο $(-\infty,-2]$.
- f συνεχής στο $[-2,0)$, $f'(x)<0$ $\sigma\tau o$ $(-2,0)$, άρα f γν. φθίνουσα στο $[-2,0)$.
- f συνεχής στο $(0,+\infty)$, $f'(x)>0$ $\sigma\tau o$ $(0,+\infty)$, άρα f γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
- Η f έχει τ. μέγιστο για x=-2 το f(-2)=-3

Β2.

f' παραγωγίσημη για κάθε $x\neq 0$ με $f''(x)=\left(1+\dfrac{8}{x^3}\right)'=-24x^{-4}<0$ για κάθε $x\neq 0$ άρα δεν έχει σ. καμπής

x	$-\infty$	0 $\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	-	-
$f(x)$	κοίλη	κοίλη

- f συνεχής $(-\infty,0)$, $f''(x)<0$ $\sigma\tau o$ $(-\infty,0)$, άρα f κοίλη στο $(-\infty,0)$
- f συνεχής $(0,+\infty)$, $f''(x)<0$ $\sigma\tau o$ $(0,+\infty)$, άρα f κοίλη στο $(0,+\infty)$.

Β3.

Κ.Α.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\text{γιατί: } \lim_{x\to 0^+} x=0,\ \lim_{x\to 0^+} 4\cdot\frac{1}{x^2}=+\infty$$

Άρα η ευθεία x=0 είναι Κ.Α της C_f.

$\Pi.\mathrm{A}$ $\sigma\tau o$ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^3}=0\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0$$

Άρα η ευθεία $y=1x+0 \Leftrightarrow y=x$ είναι Π.Α της C_f στο $+\infty$

$\Pi.\text{A} \;\; \sigma\tau o \;\; -\infty$

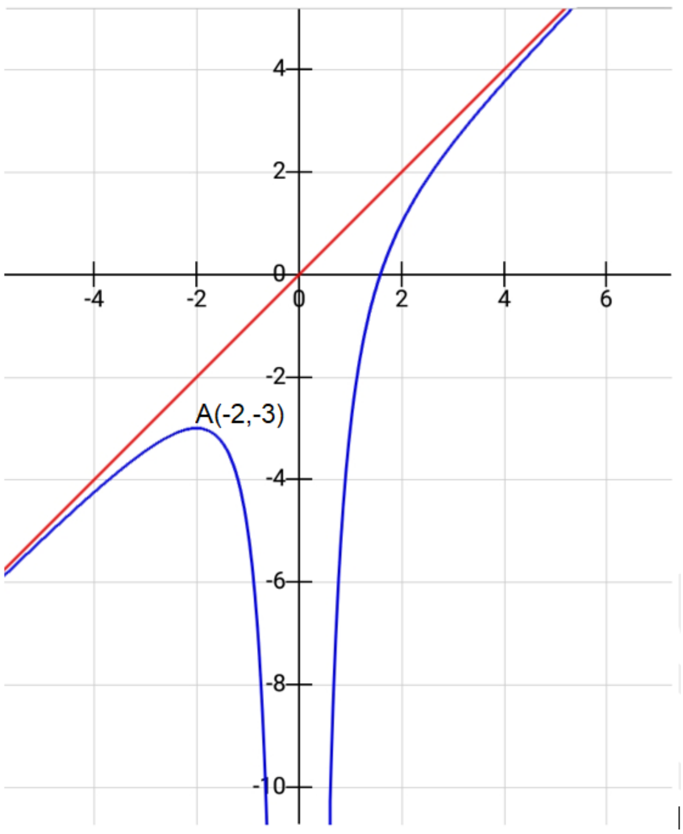
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^3}=0\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$$

άρα η ευθεία με εξίσωση y=x είναι Π.Α της C_f στο $-\infty$.

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πλευρά τετραγώνου ισούται με $\frac{x}{4}, x \in (0,8)$. Άρα, το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με $\mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho.} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}, x \in (0,8)$. Η περιφέρεια κύκλου ισούται με $8-x$. Άρα, $8-x = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$. Επομένως το εμβαδόν του κύκλου ισούται με $\mathrm{E}_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda.} = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{64-16x+x^2}{4\pi}, x \in (0,8)$. Συνεπώς, το ζητούμενο εμβαδό ισούται με

$$\mathrm{E}(x) = \mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho.} + \mathrm{E}_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.} = \frac{x^2}{16} + \frac{64-16x+x^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0,8).$$

Γ2. Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $\mathrm{E}'(x) = \frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}, x \in (0,8)$.

Άρα, $\mathrm{E}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$. Κάνουμε τον πίνακα προσήμων:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\frac{32}{\pi+4}$	8
$\mathrm{E}'(x)$	-	+
$\mathrm{E}(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Η $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$, $\mathrm{E}'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$, άρα $\mathrm{E}(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$. Η $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$, $\mathrm{E}'(x)>0$ στο $\left(\frac{32}{\pi+4},8\right)$, άρα $\mathrm{E}(x)$ γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$. Επομένως, για $x=\frac{32}{\pi+4}$ η $\mathrm{E}(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο. Για αυτή την τιμή του x η πλευρά τετραγώνου είναι $\frac{x}{4} = \frac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος του κύκλου ισούται με $\delta = \frac{8-x}{\pi} = \frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi} =$

$$= \frac{\frac{8\pi+32-32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8}{\pi+4}.$$ Τελικά, η πλευρά τετραγώνου ισούται με την διάμετρο κύκλου.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\mathrm{E}(x)=5$ έχει 1 μοναδική λύση στο $(0,8)$. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $\mathrm{E}(x)$.

$$\mathrm{E}\left(\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]\right)\underset{\mathrm{E}(x)\searrow}{\overset{\mathrm{E}(x)\Sigma\upsilon\nu.}{=}}\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 0}\mathrm{E}(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)=\Delta_1,$$

$$\mathrm{E}\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)\right)\underset{\mathrm{E}(x)\nearrow}{\overset{\mathrm{E}(x)\Sigma\upsilon\nu.}{=}}\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 8}\mathrm{E}(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi},4\right)=\Delta_2.$$

Επομένως, $5\in\Delta_1$ άρα υπάρχει ένα $x_0\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ τέτοιο ώστε $\mathrm{E}(x_0)=5$. Το x_0 είναι μοναδικό αφού $\mathrm{E}(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$. Ακόμα, $5\notin\Delta_2$, που σημαίνει ότι εξίσωση $\mathrm{E}(x)=5$ έχει 1 μοναδική λύση στο $(0,8)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=2e^{x-\alpha}(x-\alpha)'-2x=2e^{x-\alpha}-2x.$ Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=2e^{x-\alpha}(x-\alpha)'-2=2\left(e^{x-\alpha}-1\right).$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 2\left(e^{x-\alpha}-1\right)=0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}=e^0\Leftrightarrow x=\alpha.$

$f''(x)>0\Leftrightarrow 2\left(e^{x-\alpha}-1\right)>0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}>e^0\Leftrightarrow x>\alpha.$ Κάνουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$ $\quad\alpha\quad$	$+\infty$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	κοίλη	κυρτή

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$, η f είναι κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$ άρα η C_f έχει σημείο καμπής το $\mathrm{A}(\alpha,f(\alpha))$ δηλαδή το $\mathrm{A}\left(\alpha,2-\alpha^2\right)$.

Δ2. Η f' είναι συνεχής στο $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$ και γνησίως φθίνουσα. Άρα,

$f'(\Delta_1)=\left[f'(\alpha),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)$ όμως $f'(\alpha)=2e^0-2\alpha=2(1-\alpha)<0$ αφού $\alpha>1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-\alpha}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$ άρα,

$f'(\Delta_1)=\left[f'(\alpha),+\infty\right)$ με $f'(\alpha)<0$ άρα $0\in f'(\Delta_1)$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένα $x_1\in(-\infty,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$, που είναι μοναδικό αφού f' γνησίως μονότονη στο $(-\infty,\alpha]$. Όμως, για κάθε $x<x_1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_1)\Leftrightarrow f'(x)>0.$

Επίσης, για κάθε $x_1 < x < \alpha \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$. Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_1 \in (-\infty, \alpha)$ τοπικό μέγιστο το οποίο είναι και μοναδικό.

Η f' είναι συνεχής στο $\Delta_2 = [\alpha, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα. Άρα,

$f'(\Delta_2) = \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) \right)$. Όμως

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2e^{x-\alpha} - 2x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{x-\alpha} \left(1 - \dfrac{x}{e^{x-\alpha}} \right)$, όμως $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x-\alpha}} \underset{DLH}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{x-\alpha}} = 0$

άρα, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. Επομένως, $f'(\Delta_2) = [f'(\alpha), +\infty)$ με $f'(\alpha) < 0$ άρα, $0 \in f'(\Delta_2)$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένα $x_2 \in (\alpha, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$, που είναι μοναδικό αφού f' γνησίως μονότονη στο $[\alpha, +\infty)$.

Όμως, για κάθε $x > x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$. Επίσης, για κάθε $\alpha < x < x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$. Τελικά, η f παρουσιάζει στο $x_2 \in (\alpha, +\infty)$ τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι μοναδικό.

Δ3. Α' τρόπος:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_2) = \Delta$ άρα

$f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \right) = \left(2e^{x_2 - \alpha} - x_2^2, 2 - \alpha^2 \right)$. Έχουμε $f(1) = 2e^{1-\alpha} - 1$. Θα δείξουμε ότι $f(1) > f(\alpha) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$. Θεωρούμε $g(\alpha) = 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3, \alpha \in [1, +\infty)$. Έχουμε, $g'(\alpha) = -2e^{1-\alpha} + 2\alpha, \alpha \in (1, +\infty)$, $g''(\alpha) = 2e^{1-\alpha} + 2, \alpha \in (1, +\infty)$. Άρα, η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Συνεπώς, $\alpha > 1 \overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow} g'(\alpha) > g'(1) \Leftrightarrow g'(\alpha) > 0$. Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και για $\alpha > 1 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(\alpha) > g(1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2$. Άρα, $f(1) \notin f(\Delta)$ που σημαίνει ότι η εξίσωση είναι αδύνατη.

Β' τρόπος: Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 1$.

$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$

$f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 < 0$,α>1

$f'(1) < 0$, $f'(x_1) = 0$, άρα $f'(1) < f'(x_1) \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} 1 > x_1$

$1 \in (x_1, x_2)$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα από Δ2, άρα αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική που σημαίνει ότι δεν υπάρχει άλλη ρίζα στο $(1, x_2)$ άρα και στο $(\alpha, x_2) \subset (1, x_2)$. Συνεπώς, η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4. Για α=2 η $f(x) = 2e^{x-2} - x^2, x \in R$

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(2, f(2))$

$$f'(2) = -2$$
$$f(2) = -2$$

Άρα

$$\varepsilon : y - f(2) = f'(2)(x-2)$$
$$\varepsilon : y + 2 = -2(x-2)$$
$$\varepsilon : y = -2x + 2$$

Η f κυρτή στο $[2, +\infty)$ από Δ1, συνεπώς η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο $\mathrm{A}(2, f(2))$ με εξαίρεση το σημείο επαφής στο οποίο ταυτίζονται, δηλαδή ισχύει: $f(x) \geq -2x + 2,\ x \in [2, +\infty)$. Επίσης,

$$\sqrt{x-2} \geq 0,\ x \in [2, +\infty)\ \textit{οπότε}$$
$$f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2},\ x \in [2, +\infty)$$

η ισότητα ισχύει μόνο για x=2

Οι συναρτήσεις $f(x) \cdot \sqrt{x-2}, (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}$ είναι συνεχείς στο

$[2,3] \subseteq [2, +\infty)$. Άρα,

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx \quad (1)$$

Έστω

$$\mathrm{I} = \int_0^1 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$$

θέτουμε $\sqrt{x-2}=u \Leftrightarrow x=u^2+2$

άρα $dx=2udu$

για $x=2$ τοτε $u=0$

για $x=3$ τοτε $u=1$

οπότε $\mathrm{I} = \int_0^1 \left[-2\left(u^2+2\right)+2\right] 2u^2 du =$

$$= \int_0^1 \left(-2u^2-2\right)2u^2 du =$$

$$= \int_0^1 \left(-4u^4-4u^2\right)du =$$

$$= \left[-4\frac{u^5}{5}-4\frac{u^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{4}{5}-\frac{4}{3} = -\frac{12+20}{15} = -\frac{32}{15}$$

Άρα από (1) $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$

Επιμέλεια: Ομάδα μαθηματικών Φροντιστηρίου ΟιδαΝικώ